CAPÍTULO 1

Neofregeanismo: perspectivas e objeções

Alessandro B. Duarte[i]

1. Introdução

ATÉ onde eu sei, Frege (1986, 2013) foi um dos primeiros matemáticos a afirmar e a usar explicitamente princípios de abstração. Um princípio de abstração é uma fórmula que tem a seguinte forma:

$$\forall\alpha\forall\beta[\Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta). \equiv .\alpha \approx \beta],$$

onde "Σ..." é um operador formador de termos singulares, "α" e "β" referem-se às entidades de um domínio original ou primitivo a partir das quais faremos a abstração ("α" e "β" podem denotar objetos, conceitos de primeira ordem, conceitos de segunda ordem e assim por diante) e "$\approx$" designa uma relação de equivalência (ou seja, uma relação que é reflexiva[1], simétrica[2] e transitiva[3]) que ocorre entre as entidades do domínio original ou primitivo.

Em *Die Grundlagen der Arithmetik*[4], Frege formula três princípios de abstração, a saber:

(1) **Princípio da Direção**

[1] Uma relação Υ é reflexiva sobre um certo domínio D justamente quando $\forall\alpha \in D$, $\Upsilon(\alpha, \alpha)$.

[2] Uma relação Υ é simétrica sobre um certo domínio D justamente quando $\forall\alpha, \beta \in D$, $\Upsilon(\alpha, \beta) \rightarrow \Upsilon(\beta, \alpha)$.

[3] Uma relação Υ é transitiva sobre um certo domínio D justamente quando $\forall\alpha, \beta, \gamma \in D$, $\Upsilon(\alpha, \beta) \wedge \Upsilon(\beta, \gamma) \rightarrow \Upsilon(\alpha, \gamma)$.

[4] Doravante GLA.

[i] Professor Adjunto do Departamento de Filosofia da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

$$\forall a \forall b[Dir(a) = Dir(b). \equiv .a \parallel b].$$

Aqui as variáveis "a", "b" percorrem retas (que são objetos), "$Dir...$" é o operador formador de termos singulares "a direção de...." e "$\|$" significa a relação de equivalência "ser paralela ou igual a" que ocorre entre retas.

(2) **Princípio de Hume**[5]

$$\forall F \forall G[N_x : Fx = N_x : Gx. \equiv .F1 - 1G].$$

No caso acima, as variáveis "F", "G" percorrem propriedades ou conceitos de primeira ordem, "$N_x...x...$" é o operador formador de termos singulares "o número de..." ou "o número que pertence a..." e "$...1 - 1...$" expressa a relação de equivalência "ser equinumérico a" ou "estar em uma correspondência um-para-um com" que ocorre entre propriedades de primeira ordem.

(3) **Princípio da Forma**

$$\forall a \forall b[Form(a) = Form(b). \equiv .a \cong b],$$

onde as variáveis "a" e "b" percorrem figuras (que são objetos), "$Form...$" é o operador formador de termos singulares "a forma de..." e "$\cong$" é a relação de equivalência "ser congruente ou igual a" que ocorre entre figuras.

Mais tarde, em *Grundgesetze der Arithmetik*[6], Frege formulou um outro princípio de abstração que é conhecido por Lei Básica V:

$$\forall F \forall G[\{x : Fx\} = \{x : Gx\}. \equiv .\forall x(Fx \equiv Gx)].$$[7]

Aqui, as variáveis "F", "G" percorrem propriedades ou conceitos de primeira ordem, "$\{x : ...x...\}$" é o operador formador de termos singulares "a extensão de..." e "$\forall x(\xi x \equiv \zeta x)$" expressa a relação de equivalência "ser coextensional a" que ocorre entre propriedades de primeira ordem.

O papel dos princípios de abstração é introduzir "novos objetos" (os objetos abstratos) no domínio dos objetos. Por exemplo, assumamos o Princípio de Hume

(i) $\forall F \forall G[N_x : Fx = N_x : Gx. \equiv .F1 - 1G].$

Se instanciarmos universalmente, obteremos

[5] Até onde sei, foi Boolos (1998a) quem cunhou o nome "Princípio de Hume".
[6] De agora em diante, GGA.
[7] A Lei Básica V não tem exatamente essa forma em GGA, todavia, para nossos propósitos, ela pode ser expressa dessa maneira.

(ii) $N_x : Hx = N_x : Hx. \equiv .H1 - 1H.$

Mas, em lógica de segunda ordem, temos que

(iii) $\forall F(F1 - 1F)$[8].

Instanciando universalmente a fórmula acima, chegamos a

(iv) $H1 - 1H.$

De (ii) e (iv), resulta que (lógica proposicional)

(v) $N_x : Hx = N_x : Hx.$

E aqui temos o passo mais controverso[9]. Uma vez que "$N_x : Hx$" é um termo singular, cuja referência é um objeto, então podemos inferir

(vi) $\exists y(y = N_x : Hx).$

De (vi), generalizando universalmente, obtemos

(vii) $\forall F \exists y(y = N_x : Fx).$

A prova dada acima significa que a toda propriedade está associado um determinado objeto abstrato, seu número cardinal. Em outras palavras, toda propriedade tem um número cardinal. E é justamente nesse ponto que o pesadelo de Frege começou. Da mesma maneira que podemos inferir que toda propriedade tem um número cardinal a partir do Princípio de Hume, podemos inferir que toda propriedade tem uma extensão a partir da Lei Básica V. Ou seja,

$$\forall F \exists y(y = \{x : Fx\}).$$

Ora, dada a definição de Frege da relação de pertinência, a saber, $a \in b =_{df} \exists G(\{x : Gx\} = b \wedge Ga)$, é possível derivar uma contradição assumindo a propriedade *não ser membro de si mesmo*[10] (o Paradoxo de Russell)[11].

---

8 Ou seja, toda propriedade de primeira ordem é equinumérica a si mesma.

9 Mais adiante, eu discutirei a controvérsia mais detalhadamente.

10 Admitindo-se, é claro, que tal propriedade tem uma extensão. Mas, pela Lei Básica V, toda propriedade tem uma extensão.

11 Considere o conceito Russelliano *não ser membro de si mesmo*, isto é, $\exists G(\xi = \{x : Gx\} \wedge \neg G\xi)$. Abreviemos este conceito por $F\xi$. Portanto, o conceito *não ser membro de si mesmo* tem de ter, pela Lei Básica V, uma extensão, a saber, $\{w : \exists G(w = \{x : Gx\} \wedge \neg Gw)\}$. Denotemos $\{w : \exists G(w = \{x : Gx\} \wedge \neg Gw)\}$ de **j**. E abreviemos $\{w : \exists G(w = \{x : Gx\} \wedge \neg Gw)\}$ por $\{x : Fx\}$. Então $\mathbf{j} = \{x : Fx\}$. Agora suponhamos que **j** satisfaz a condição de *não ser membro de si mesmo*, isto é, $F\mathbf{j}$. Pela Lei Básica

Em GGA, Frege defendeu que a Lei Básica V era um princípio lógico e a partir dela e de outras leis lógicas (mais definições lógicas de conceitos aritméticos) ele derivou teoremas da aritmética (inclusive, os análogos dos axiomas de Dedekind-Peano). Com isso, ele reivindicou que a sua tese logicista (em relação à aritmética), a tese segundo a qual todo teorema da aritmética é derivável por meios puramente lógicos, era correta. Todavia, a contradição não só mostrou que a Lei Básica V não é um princípio lógico, mas também que ela é uma falsidade lógica[12].

Frege ainda tentou alterar, no posfácio de GGA, a Lei Básica V para evitar a derivação da contradição, porém, segundo Dummett (1991), Frege desistiu em 1906 do logicismo, porque percebera que a sua solução não era satisfatória.

2. Neofregeanismo: perspectivas

Em 1983, Crispin Wright publicou uma monografia, *Frege's Conception of Numbers as Objects*[13], na qual ele defendia que uma espécie de logicismo em relação à aritmética (dos números naturais) de inspiração Fregeana ainda é possível. De acordo com Wright, Frege não precisava abandonar o projeto logicista por causa do Paradoxo de Russell, uma vez que ele tinha a sua disposição um princípio de abstração que não era problemático. E, de fato, o próprio Frege fez uso corrente, nos esboços das provas dadas em GLA, de tal princípio. Este princípio de abstração é o Princípio de Hume.

É interessante mencionar que, em GLA (§63), Frege propôs como uma possível definição de número o Princípio de Hume. No entanto, Frege descartou-o como uma definição — aqui vale ressaltar "como uma definição" — por causa do Problema de Júlio César. De acordo com a discussão de Frege (GLA até §63), os números individuais são objetos e, portanto, é necessário, ele diz, definir o sentido de uma proposição na qual os numerais (que se referem aos números individuais)

V, obtemos que $\{x : Fx\} = \{x : Gx\} \rightarrow G\mathbf{j} \equiv F\mathbf{j}$, para algum conceito $G\xi$. Mas, como $\mathbf{j} = \{x : Fx\}$, então temos $\{x : Gx\} = \mathbf{j} \rightarrow G\mathbf{j} \equiv F\mathbf{j}$. Por lógica proposicional, temos $\{x : Gx\} = \mathbf{j} \rightarrow (F\mathbf{j} \rightarrow G\mathbf{j})$. Novamente, por lógica proposicional, $F\mathbf{j} \rightarrow (\{x : Gx\} = \mathbf{j} \rightarrow G\mathbf{j})$. Generalize universalmente, $F\mathbf{j} \rightarrow \forall H(\{x : Hx\} = \mathbf{j} \rightarrow H\mathbf{j})$. Por lógica de predicados, temos $F\mathbf{j} \rightarrow \neg\exists H(\{x : Hx\} = \mathbf{j} \wedge \neg Hj)$. Mas, $\neg\exists H(\{x : Hx\} = \mathbf{j} \wedge \neg Hj)$ é a negação do conceito *não ser membro de si mesmo*, ou seja, $\neg F\xi$. Portanto, (a) $F\mathbf{j} \rightarrow \neg F\mathbf{j}$. Suponhamos agora que $\mathbf{j}$ não satisfaz a condição de *não ser membro de si mesmo*, isto é, $\neg F\mathbf{j}$. Uma vez que $\neg F\mathbf{j}$ é $\neg\exists H(\{x : Hx\} = \mathbf{j} \wedge \neg Hj)$ e este, por sua vez, é equivalente a $\forall H(\{x : Hx\} = \mathbf{j} \rightarrow H\mathbf{j})$. Como $\neg F\mathbf{j} \rightarrow \neg F\mathbf{j}$, então temos $\neg F\mathbf{j} \rightarrow \forall H(\{x : Hx\} = \mathbf{j} \rightarrow H\mathbf{j})$. Disso derivamos $\neg F\mathbf{j} \rightarrow (\{x : Fx\} = \mathbf{j} \rightarrow F\mathbf{j})$. Como $\mathbf{j} = \{x : Fx\}$, segue-se que (b) $\neg F\mathbf{j} \rightarrow F\mathbf{j}$. De (a) e (b) obtemos uma contradição. Uma prova análoga é dada em Ruffino (1998, p. 167-171).

[12] Essa afirmação é controversa, uma vez que, em lógica de segunda ordem predicativa, a Lei Básica V é consistente. Heck (1996) mostrou que a adição da Lei Básica V à lógica de segunda ordem predicativa (+ definições de conceitos aritméticos) produz uma teoria capaz de interpretar a Aritmética de Robinson, que não é trivial.

[13] Doravante, FC.

ocorram significando objetos. Frege escolhe a proposição que expressa a relação de identidade entre números, uma vez que, para Frege, a relação de identidade é uma relação de primeira ordem a qual se aplica a objetos. Portanto, Frege tem de fixar o sentido da proposição[14]

"O número que pertence ao conceito F é igual ao número que pertence ao conceito G".

Frege define a identidade acima em termos de uma correspondência um-para-um entre os conceitos F e G. Entretanto, o próprio Frege apresenta três possíveis objeções ao Princípio de Hume, sendo as duas primeiras, segundo ele, contornáveis. Porém, a terceira objeção, o Problema de Júlio César, é crucial. De acordo com Frege, a relação de identidade, sendo uma relação de primeira ordem, tem de ser aplicada a qualquer objeto. Então, poderíamos sempre perguntar se quaisquer dois objetos são os mesmos ou não. Assim, uma vez que números individuais são objetos, poderíamos perguntar, por exemplo, se o número zero é idêntico a Júlio César ou não. De uma maneira mais geral, teríamos de ter uma maneira de decidir a verdade de proposições que têm a forma

"o número do conceito F é igual a q",

onde "q" é uma variável objectual. O Princípio de Hume não pode decidir a verdade da proposição na qual "q" é substituído por "Júlio César" e, de uma maneira mais geral, das proposições nas quais "q" é substituído por expressões diferentes de "o número de...".

Depois desta pequena digressão, voltemo-nos a Wright. Ele notou que Frege, em GLA, não desconsidera totalmente o Princípio de Hume, uma vez que Frege o prova imediatamente da sua definição explícita[15] e a partir daí nenhum uso é feito da definição explícita para esboçar as provas dos teoremas de GLA[16].

Wright conjeturou, em FC, que se adicionássemos o Princípio de Hume a uma teoria de lógica de segunda ordem impredicativa, a teoria resultante (chamada Aritmética de Frege), além de provar os axiomas da aritmética de segunda ordem de Dedekind-Peano, seria consistente. Na sua resenha à monografia de Wright, John Burgess (1984) expõe informalmente um modelo para o Princípio de Hume.

[14] Em Duarte (2004), há uma discussão mais detalhada.

[15] Depois de descartar o Princípio de Hume como uma definição, Frege define o operador numérico "o número que pertence ao conceito F" em termos de extensão de conceitos. Há dúvidas se Frege tinha uma prova formal do Princípio de Hume a partir da definição explícita em 1884. Veja a discussão sobre isso em Duarte (2009) e Landini (2012).

[16] As provas são todas derivadas do Princípio de Hume.

E Boolos (1998b, 1998c) apresenta uma prova formalizada da consistência do Princípio de Hume, mostrando que ele tem um modelo. Boolos (1998a) mostra um resultado ainda mais forte, a saber, que a aritmética de Frege é equiconsistente com a Análise (PA2).

Todos estes resultados deram força ao neologicismo e neofregeanismo de Wright. Abaixo discutirei as suas principais doutrinas.

2.1. O neofregeanismo versus neologicismo

Em Duarte (2004), não tinha totalmente claro que o neofregeanismo e o neologicismo de Wright, apesar de serem teses intimamente relacionadas, são, de certa forma, independentes. **O neofregeanismo é a tese segundo a qual números são objetos (abstratos)**[17][18]. Por outro lado, **o neologicismo é a tese segundo a qual a aritmética é analítica,** uma vez que é possível provar os axiomas da aritmética de segunda ordem de Dedekind-Peano a partir do Princípio de Hume (mais lógica de segunda ordem).

De acordo com Wright, o Princípio de Hume, embora não seja uma definição estrita[19] (do operador numérico "$N_x ... x ...$"), poderia ser considerado como uma espécie de explicação ou uma estipulação de como usamos a expressão "o número de...". Para Wright, o Princípio de Hume seria uma estipulação analítica, porque no lado direito da equivalência ocorre apenas terminologia lógica (correspondência um-para-um entre conceitos).

É possível ser neofregeano, sem ser neologicista. Isto é, pode-se aceitar que os números são objetos, mas não aceitar que o Princípio de Hume seja uma estipulação analítica do operador numérico "$N_x ... x ...$". Alguém que não aceita que lógica de segunda ordem é lógica, mas que aceita que o Princípio de Hume introduz números como objetos, estaria em posição de aceitar o neofregeanismo e de rejeitar o neologicismo.

O próprio Wright pode ser neofregeano, sem ser neologicista em certos casos. Assuma por exemplo o Princípio de Direção

$$\forall a \forall b [Dir(a) = Dir(b). \equiv a \parallel b].$$

Wright aceitaria, sem a menor dúvida, que "a direção de a" refere-se a um objeto (abstrato), mas dificilmente ele aceitaria que o Princípio de Direção é uma estipu-

[17] Aqui, via Princípio de Hume.

[18] Na verdade, a tese é mais geral: as entidades introduzidas via princípios de abstração são objetos abstratos.

[19] Mais adiante, eu discutirei esta questão.

lação analítica do operador de direção "a direção de...". A relação de equivalência que ocorre no lado direito do princípio mencionado acima não usa terminologia lógica[20].

Por outro lado, poder-se-ia ser um neologicista, sem ser um neofregeano. Mas não entrarei nos detalhes aqui, pois iríamos além do tema proposto[21].

Comecemos discutindo rapidamente o neofregeanismo. Vale mencionar que existem algumas subteses subjacentes ao neofregeanismo. Wright inverte a concepção geral da relação entre linguagem e realidade. Segundo ele, a realidade espelha, por assim dizer, quando falamos verdadeiramente, os contornos da linguagem[22][23].

Uma das teses subjacentes ao neofregeanismo é a **Tese da Decisão Sintática**[24], a tese segundo a qual quando uma expressão apresenta características sintáticas de um termo singular, então isto determinará decisivamente que tal expressão tem a função semântica de um termo singular.

E ainda há a **Tese do Minimalismo Referencial**, a tese segundo a qual quando uma expressão figura em uma sentença atômica verdadeira, então existirá uma entidade no mundo que corresponde a tal expressão.

E finalmente existe a **Tese da Prioridade Sintática**, a tese segundo a qual as categorias sintáticas têm prioridades sobre as categorias semânticas (portanto, para que alguma entidade seja um objeto é necessário que algum termo singular se refira a tal entidade)[25].

Assim, se "Fa" for uma sentença atômica verdadeira, e se "a" for um termo singular, então "a" desempenhará a função semântica de um termo singular (Tese da Decisão Sintática). Como a sentença atômica na qual figura "a" é verdadeira, então existe a entidade no mundo que corresponde a "a" (Tese do Minimilismo

---

[20] Embora este fato não estivesse totalmente claro para mim quando escrevi minha dissertação, implicitamente eu já o assumia. Em Duarte (2004, p. 96), em uma nota, escrevi (de forma bastante obscura): "O Princípio de Hume será uma definição analítica (ver capítulo anterior). Nem todo princípio de abstração é considerado como uma definição implícita analítica. Por exemplo, o Princípio de Direção, apesar de ser considerado como uma definição implícita a priori por Wright, não é analítico".

[21] Bostock (1974) propõe assumir os números naturais como conceitos de segunda ordem e mostra como derivar os axiomas de Dedekind-Peano. Tal derivação é assumida como neologicista, mas não é neofregeana.

[22] A concepção mais comum entre linguagem e realidade é que esta tem uma natureza totalmente fixa e, por isso, é totalmente independente daquela.

[23] Mais adiante, eu levantarei uma possível objeção ao neofregeanismo de Wright. O que significa "falar verdadeiramente"? Os argumentos de Chateaubriand (2001) persuadiram-me de que a noção de verdade é uma noção intimamente ligada à ontologia, portanto o neofregeanismo de Wright ainda parece depender de noções semânticas, uma vez que "precisamos falar verdadeiramente" para que a realidade espelhe os contornos da linguagem.

[24] Aqui, seguimos a nomenclatura de MacBride (2003).

[25] O neofregeanismo de Wright é uma tentativa de responder à objeção (ou dilema) de Benacerraf desenvolvida no artigo *Mathematical Truth* (1973). Não entrarei nos detalhes aqui, mas o leitor interessado pode ver o capítulo 2 de FC.

Referencial). Mas, uma vez que "a" desempenha o papel de um termo singular, então "a" referir-se-á a um objeto (pela Tese da Prioridade Sintática).

A Tese do Minimalismo Referencial e a Tese da Decisão Sintática são, na minha opinião, consequências da interpretação de Wright (em FC) do Princípio do Contexto Fregeano.[26][27].

A Tese da Decisão Sintática é uma tese bastante controversa de Wright e é a que foi menos explorada nas suas discussões sobre o neofregeanismo. O problema é: como podemos caracterizar um certo termo como tendo característica de um termo singular? A caracterização tem de ser totalmente isenta de noções semânticas, porque, caso contrário, ela feriria a Tese da Prioridade Sintática. Em outras palavras, Wright tem de caracterizar a noção "termo singular" por meio de noções puramente sintáticas. Isso seria possível? Mais adiante voltaremos a este ponto.

Agora estamos em posição de discutir o passo controverso na prova de que toda propriedade de primeira ordem tem um número cardinal (o passo de (v) para (vi) acima). Segundo Wright, o Princípio de Hume estipula as condições de verdade de sentenças da forma

$$N_x : Fx = N_x : Gx.$$

Ora, se o lado direito do Princípio de Hume for verdadeiro, resultará que a sentença acima também o é. Uma vez que "$N_x : Fx$" e "$N_x : Gx$" são considerados termos singulares, então eles têm a função semântica de um termo singular (Tese da Decisão Semântica) e referem-se a objetos existentes no mundo (Tese do Minimalismo Referencial e da Prioridade Sintática). Daí a possibilidade da inferência em (vi).

Em geral, qualquer princípio de abstração implicaria a existência dos abstratos que eles introduzem (é claro que, como disse, a Lei Básica V não implica a existência das extensões, porque ela é falsa). Assumamos um princípio de abstração qualquer

(i*) $\forall\alpha\forall\beta[\Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta). \equiv .\alpha \approx \beta]$.[28]

Instanciando universalmente, obtemos

(ii*) $\Sigma(\mu) = \Sigma(\mu). \equiv .\mu \approx \mu$.

[26] Wright assume que o Princípio do Contexto é um princípio que rege a referência das expressões. Contudo, o Princípio do Contexto é bastante controverso. Não entrarei nos detalhes aqui. Em Duarte (2004), capítulo 2, há alguma discussão sobre este ponto.

[27] Gostaria de agradecer ao Prof. Dr. André Pontes (UFAM) por chamar minha atenção sobre uma formulação incorreta dessa passagem que fiz em uma versão anterior desse artigo.

[28] Assumamos que tal princípio é aceitável. Veja mais adiante a discussão da Má Companhia.

Uma vez que "$\approx$" expressa uma relação de equivalência, então temos

(iii*) $\mu \approx \mu$.

Por lógica proposicional, chegamos a

(iv*) $\Sigma(\mu) = \Sigma(\mu)$.

Ora, como disse, se o lado direito do princípio de abstração for verdadeiro, então a sentença (iv*) será verdadeira. Como "$\Sigma(\mu)$" é considerado um termo singular, pelas Teses da Decisão Semântica, do Minimalismo Referencial e da Prioridade Sintática, existe o objeto referido por "$\Sigma(\mu)$".

Portanto,

$$\exists y(y = \Sigma(\mu)).$$

Agora, generalizando universalmente

$$\forall \alpha \exists y(y = \Sigma(\alpha)).$$

Voltemo-nos agora ao neologicismo. É necessário apresentar uma classificação dos princípios de abstração em relação às entidades do domínio original ou primitivo:

(a) **Princípios de Abstração Objectuais**: são os princípios cuja relação de equivalência (à direita) é relevante a objetos. Os exemplos de princípios de abstração objectuais são: O Princípio de Direção e o Princípio da Forma.

(b) **Princípios de Abstração Conceituais**: são os princípios cuja relação de equivalência (à direita) é relevante a propriedades ou conceitos (de primeira ordem, de segunda ordem, e assim por diante). Os exemplos de princípios de abstração conceituais são: Princípio de Hume e Lei Básica V.

Precisei fazer esta distinção porque, como foi afirmado acima, o próprio Wright pode assumir o neofregeanismo, sem aceitar o neologicismo. Isto acontece, em geral, no caso dos princípios de abstração objectuais, uma vez que as relações de equivalência que neles ocorrem não são lógicas[29]. Portanto, nosso interesse aqui é nos princípios de abstração conceituais.

O logicismo de Frege, como escrevi acima, é a tese segundo a qual as leis da aritmética são derivadas por meios puramente lógicos, ou seja, são derivadas a

[29] Agora, se existir algum exemplo de princípio de abstração objectual cuja relação de equivalência usa terminologia lógica, então poder-se-ia defender a analiticidade de um tal princípio.

partir de axiomas lógicos mais definições lógicas de conceitos aritméticos. Como já mencionei, Wright defende uma posição logicista em relação à aritmética e a sua tese é amplamente amparada pela derivação dos axiomas da aritmética de segunda ordem de Dedekind-Peano a partir do Princípio de Hume mais lógica de segunda ordem. Portanto, se considerarmos o logicismo conforme concebido por Frege, então teremos duas opções:

(I) ou o Princípio de Hume é um axioma lógico;

(II) ou o Princípio de Hume é uma definição[30].

Ora, o Princípio de Hume implica a existência de infinitos números naturais. E um axioma lógico, pelo menos na visão atual de axioma lógico, não pode provar a existência de um único objeto. Além disso, um axioma lógico tem de ser verdadeiro em qualquer domínio (ou modelo) não-vazio de objetos. Contudo, o Princípio de Hume só é verdadeiro em domínios infinitos. A conclusão é: o Princípio de Hume não é um axioma lógico[31].

Agora, se Frege tivesse sido bem sucedido em GGA, então poderia ser assumido que a Lei Básica V implicaria a existência de infinitos objetos (no caso, as extensões) e que ela seria verdadeira somente em domínios infinitos. Infelizmente, Frege não foi bem-sucedido!!!

Mas, se o Princípio de Hume não pode ser um axioma lógico (pelo menos na interpretação contemporânea de axioma lógico), então, seguindo a situação mencionada acima, tal princípio seria uma definição? Como já disse anteriormente, Frege rejeitou o Princípio de Hume como uma definição devido ao Problema de Júlio César. Mas independente de tal problema, o Princípio de Hume não pode ser uma definição no sentido estrito.

Uma definição no sentido estrito tem de satisfazer dois critérios:

(A) **o critério da eliminabilidade**: uma definição no sentido estrito deve funcionar como uma mera abreviação, de forma que seja possível eliminar totalmente as expressões introduzidas pela definição;

(B) **o critério da não-criatividade**: uma definição no sentido estrito, uma vez que é uma mera abreviação, não pode produzir qualquer nova consequência para a teoria à qual tal definição é adicionada[32].

---

[30] Aqui, considero que lógica de segunda ordem é lógica.
[31] Tal conclusão é defendida, por exemplo, por Boolos (1998d).
[32] É importante mencionar que Frege (2013) defende, em um certo sentido, os dois critérios acima.

O Princípio de Hume não satisfaz nenhum destes dois critérios. O Princípio de Hume implica a existência de infinitos números naturais, portanto ele é criativo. Por outro lado, uma vez que "$N_x : Fx$" é um termo singular e refere-se a um objeto, então "$N_x : Fx$" cai no escopo dos quantificadores de primeira ordem da relação de equinumerosidade e, portanto, o operador numérico, "$N_x ...x...$", não é completamente eliminável, assumindo que o Princípio de Hume é uma definição de tal operador[33].

Wright "reinterpreta", então, o logicismo. Desta "reinterpretação" surgiu o neo-logicismo. Ele sustenta, como já disse, que o Princípio de Hume é uma explicação ou estipulação de como usamos o operador numérico. Às vezes, Wright também afirma que o Princípio de Hume é uma definição implícita de tal operador e, como uma definição implícita, o Princípio de Hume é capaz de fixar o significado de "$N_x ...x...$". Além disso, Wright defende que o Princípio de Hume é uma definição implícita analítica de tal operador, uma vez que a relação de equivalência (à direita) é expressa em termos puramente lógicos (lógica de segunda ordem).

3. Objeções e respostas

3.1 Má Companhia

Em geral, todo princípio de abstração conceitual cuja relação de equivalência (à direita) é expressa em termos puramente lógicos deveria ser considerado também uma definição implícita analítica do operador formador de termos singulares correspondente (à esquerda). O primeiro problema é a Lei Básica V. Ela não pode ser uma explicação ou uma definição implícita analítica do operador "$\{x : ...x...\}$". Dummett (1991, p. 189) escreve:

> In this case, we therefore have three options: to reject the context principle altogether; to maintain it, but declare that it does not vindicate the procedure Wright has in mind; and to formulate a restriction upon it that distinguishes the cardinality operator from abstraction operator. Wright does none of these things: he maintains the context principle in full generality, understood as he interprets it, and defends the appeal to it to justify ascribing a reference to terms numerical, considered as introduced in the foregoing manner, without stopping why apparently similar manner of introducing value-range terms should led to contradiction. He owes us such an explanation; the claim that the method of introducing the cardinality operator he envisages would obviate any use of the notion of a class supplies no excuse for his failure to provide that explanation.

[33] Há uma maior discussão em Duarte (2004, cap. 2).

Esta é a Objeção da Má Companhia[34]. A questão é: uma vez que existem princípios de abstração inconsistentes, que garantias temos para considerarmos que um determinado princípio de abstração conceitual cuja relação de equivalência usa somente terminologia lógica (em particular, o Princípio de Hume) é verdadeiro e, se ele for, analítico? Dever-se-ia elaborar algum mecanismo para separar os princípios de abstração "bons" dos "maus".

Wright acredita que seja possível formular algumas restrições para separar os princípios de abstração conceituais "bons" dos "maus". O primeiro critério é a consistência. Um princípio de abstração conceitual será "bom" se ele for consistente. Em última análise, se um princípio de abstração conceitual cuja relação de equivalência é expressa em termos puramente lógicos for consistente, então ele será uma definição implícita analítica do operador formador de termos. Em particular, uma vez que Princípio de Hume é consistente (relativo a PA2), ele é um princípio de abstração "bom" e analítico.

Mas Boolos não ficou totalmente satisfeito com a resposta de Wright e reformulou a Objeção da Má Companhia. O Princípio de Hume é verdadeiro (consistente) somente em domínios infinitos, contudo é possível construir outros princípios de abstração conceituais que são verdadeiros (consistentes), mas verdadeiros (consistentes) apenas em domínios finitos. O exemplo de Boolos é o Princípio da Paridade:

$$\forall F \forall G \{Par(F) = Par(G). \equiv .[(F \wedge \neg G) \vee (G \wedge \neg F)] \text{ é par}\}.$$

Aqui, "Par..." é o operador formador de termos singulares "a paridade de...", "$[(F \wedge \neg G) \vee (G \wedge \neg F)]$ é par"[35] é uma relação de equivalência que ocorre entre as propriedades de primeira ordem.

Outro princípio de abstração conceitual que é verdadeiro (consistente) somente em domínios finitos é o Princípio de *Nuissance*:

$$\forall F \forall G \{n(F) = n(G). \equiv .[(F \wedge \neg G) \vee (G \wedge \neg F)] \text{ é finito}\}.$$

[34] Boolos (1998a, p. 214) apresenta a mesma objeção: "It is clear that an account of logical truth that attempts to distinguish Hume's principle as a logical truth will have the hard task of explaining why Hume's principle is a logical truth even though two other similar-looking principles are not. These are the principles about extension embodied in Frege's Rule (V) and a principle about relation numbers that is strikingly analogous to Hume's principle. They read: Extensions of concepts are identical if and only if those concepts are coextensive; and: Relation numbers of relations are identical if and only if those relations are isomorphic. Russell showed the former inconsistent; Harold Hodes has astutely observed that the latter leads to the Burali-Forty paradox".

[35] Em palavras, a relação de equivalência é: "O número das coisas que são F e não são G ou número das coisas que são G e não são F é par".

Neste caso, “n....” é o operador formador de termos singulares “a *nuissance* de...” e “$[(F \wedge \neg G) \vee (G \wedge \neg F)]$ é finito”[36] é uma relação de equivalência que ocorre entre propriedades de primeira ordem.

Agora, as relações de equivalências presentes no Princípio da Paridade e no Princípio de *Nuissance* podem ser expressas por meios puramente lógicos[37]. Portanto, ambos os princípios podem ser considerados como definições implícitas analíticas dos operadores “a paridade de...” e “a *nuissance* de...”, respectivamente. A questão é: o Princípio de Hume e o Princípio da *Nuissance* (ou o Princípio da Paridade) são incompatíveis. Se o Princípio de Hume for analítico, então o Princípio da *Nuissance* será falso. O dilema é: qual (is) razão (ões) Wright tem para aceitar a analiticidade de certos princípios de abstração conceituais consistentes em detrimento de outros princípios de abstração conceituais consistentes? Novamente, Wright teria de ter algum mecanismo para separar os princípios de abstração conceituais consistentes “bons” dos “ruins”.

Aqui vale a pena classificar os princípios de abstração conceituais quanto ao seu caráter inflacionário:

(a) Chamaremos um princípio de abstração conceitual de **Universalmente Inflacionário**, se ele não for verdadeiro (consistente) em nenhum domínio (finito ou infinito)[38]. Exemplo: A Lei Básica V.

(b) Chamaremos um princípio de abstração conceitual de **fin-Inflacionário**, se ele não for verdadeiro (consistente) em domínios finitos. Exemplo: Princípio de Hume.

(c) Chamaremos um princípio de abstração conceitual de **inf-Inflacionário**, se ele não for verdadeiro (consistente) em domínios infinitos. Exemplo: Princípio da Paridade e Princípio de *Nuissance*.

A questão de Boolos pode ser reinterpretada da seguinte forma: se consistência for um critério para separar os princípios de abstração conceituais “bons” dos “ruins”, então teremos um conjunto de princípios de abstração conceituais consistentes ao qual pertencem o Princípio de Hume, o Princípio da Paridade e o Princípio da *Nuissance* (talvez pertençam a este conjunto outros princípios). Agora, tal conjunto é Universalmente Inflacionário. Não há nenhum domínio que satisfaça, ao mesmo tempo, a todos estes princípios.

[36] Em palavras, a relação de equivalência é: “O número das coisas que são F e não são G ou número das coisas que são G e não são F é finito”.
[37] Em Duarte (2004), seção 4.4, há uma discussão mais detalhada.
[38] Assumindo lógica de segunda ordem clássica como *background*.

Wright propõe um outro critério para separar os princípios de abstração "bons" dos "ruins". A sua ideia é que o Princípio de Hume é conservativo, enquanto o Princípio da *Nuissance* e da Paridade não são. A noção de conservatividade é próxima daquela proposta por Hartry Field (1980). A ideia de Wright é a seguinte:

- Um princípio de abstração conceitual consistente será conservativo se tal princípio não implicar nenhum novo teorema sobre uma determinada teoria T quando o princípio é adicionado a T (ou seja, o princípio não apresenta qualquer tipo de restrição à ontologia de T)[39].

Como disse acima, o Princípio de Hume não é não-criativo. E quando ele é adicionado a uma teoria T qualquer, ele implica a existência de infinitos números naturais[40]. Ou seja, neste sentido estrito, o Princípio de Hume não seria conservativo. Mas note que o Princípio de Hume implica a existência de números. É indiferente a tal princípio a ontologia da teoria T. O mesmo não acontece com o Princípio da *Nuissance*. Quando este princípio é adicionado a qualquer teoria T, ele faz novas asserções sobre a ontologia original de T. Por exemplo, se a teoria T for uma teoria sobre gatos, então T + Princípio de *Nuissance* implica que há finitos gatos, embora T não implique isto. No caso do Princípio de Hume, é irrelevante se há finitos ou infinitos gatos. Como Frege sustentaria: mesmo que não existisse nada no mundo, ainda assim existiriam os números. A diferença fundamental entre o Princípio de Hume e o Princípio de *Nuissance* é que aquele implica a existência de pelo menos k-objetos (sendo k um número cardinal qualquer), enquanto este implica a existência de no máximo k-objetos. Nesse sentido, todos os princípios de abstração conceituais consistentes inf-Inflacionários seriam não-conservativos.

O problema é que há, segundo Shapiro e Weir (1999), princípios de abstração conceituais consistentes conservativos que fazem asserções ontológicas inconsistentes entre si. Assumamos o seguinte esquema de princípio de abstração:

(*) $\forall F \forall G[\Sigma(F) = \Sigma(G). \equiv .(\Phi(F) \wedge \Phi(G)) \vee \forall x(Fx \equiv Gx)]$,

onde "Φ" é qualquer propriedade de segunda ordem.

(*) é uma instância de um princípio de abstração conceitual mais geral:

(**) $\forall F \forall G[\Sigma(F) = \Sigma(G). \equiv .P \vee \forall x(Fx \equiv Gx)]$,

onde "P" é qualquer sentença que pode ser expressa na linguagem da lógica de segunda ordem.

---

[39] Há uma formulação um pouco mais rigorosa em Duarte (2004, seção 4.4).

[40] Lembrando novamente que estou considerando que lógica de segunda ordem clássica é, de fato, lógica e, portanto, *background* de qualquer teoria.

Richard Heck (1992) mostrou que (**) será consistente se e somente se "P" for consistente (na verdade, Heck trabalha com a noção de satisfação). Portanto, (*) será consistente se e somente se "$(\Phi(F) \wedge \Phi(G))$" for consistente.

Voltando a Shapiro e Weir, se admitirmos, em (*), que "Φ" é a propriedade de segunda ordem "ser o tamanho do universo cuja cardinalidade é algum limite inacessível", então obteremos um princípio de abstração conceitual consistente e conservativo.

(***) $\forall F \forall G[\Sigma(F) = \Sigma(G) \equiv (F$ tem a cardinalidade de algum limite inacessível $\wedge$ G tem a card. de algum limite inacessível$) \vee \forall x(Fx \equiv Gx)]$.

Por outro lado, se admitirmos, em (*), que "Φ" é a propriedade de segunda ordem "ser o tamanho do universo cuja cardinalidade é algum sucessor inacessível", então obteremos outro princípio de abstração conceitual consistente e conservativo.

(****) $\forall F \forall G[\Sigma(F) = \Sigma(G). \equiv .(F$ tem a card. de algum sucessor inacessível $\wedge$ G tem a cardinalidade de algum sucessor inacessível$) \vee \forall x(Fx \equiv Gx)]$.

Entretanto, os dois princípios são inconsistentes entre si. O conjunto dos princípios de abstração conceituais consistentes e conservativos é Universalmente Inflacionário. Novamente, o Problema da Má Companhia.

O problema de princípios de abstração conceituais que têm a forma de (*) é que existe embutido neles um outro princípio de abstração conceitual (a Lei Básica V) que é inconsistente (Universalmente Inflacionário). Wright afirma que estes princípios implicam que a cardinalidade do universo é tal e tal, porque exploram o componente paradoxal (é possível mostrar que (*) implica $\exists F \Phi(F)$). Assim, Wright (2001a, p. 301) escreve:

> That suggests that a particular D-type abstraction, or other paradox embedding instance, may be acceptable provided it meets another conservativeness constraint: roughly, that any consequences which may be elicited by exploiting its paradoxical component should be, a priori, in independent good standing. Theorems of logic are so par excellence. But 'independent good standing' might also reasonably be taken to cover the case where a consequence elicited from such an abstraction by 'fishy' — paradox-exploitative — means can also be obtained not from logic alone but, as it were, innocently from additional resources provided by that very abstraction.

A restrição proposta acima foi chamada de Restrição do Quase-Paradoxo (Near-Paradox). A ideia é a seguinte: as consequências ontológicas das instâncias dos princípios de abstração que têm a forma de (*) não podem depender da exploração do componente paradoxal. Assim, os princípios de abstração (***) e (****) seriam "maus", porque exploram o componente paradoxal.

3.2 O problema do Princípio do Contexto

Há outro ponto controverso em relação à teoria da abstração nos moldes propostos por Wright. Um primeiro problema é como explicar que a existência dos números a partir do Princípio de Hume é analítica; de uma maneira mais geral, como explicar que a existência de qualquer abstrato introduzido por um princípio de abstração conceitual cuja relação de equivalência é expressa em termos lógicos é analítica. A prova depende do Princípio do Contexto (a Tese do Minimalismo Referencial e a Tese da Decisão Sintática). A questão é: o Princípio do Contexto é um princípio lógico? Se ele não for, o neologicismo de Wright não parece ser justificado. Um outro problema: Wright justifica a prioridade das categorias sintáticas sobre as categorias semânticas recorrendo à noção de verdade. Todavia, estou convencido de que esta noção é ontológica. Portanto, parece existir uma espécie de círculo na posição de Wright. Em termos puramente sintáticos, é difícil ver como o operador formador de termos singulares "Σ..." possa denotar algum objeto. Assim, poderíamos dizer que o Princípio de Hume será verdadeiro se existirem números. Em uma maneira mais geral, um princípio de abstração conceitual será verdadeiro se existirem os abstratos que ele introduz. Acredito que essa seria também a posição que Chateaubriand (2001) sustentaria.

A tentativa de se formular uma teoria da abstração nos moldes de Wright esbarra ainda em um outro problema, a saber, como caracterizar sintaticamente a noção de "termo singular". Hale[41] (1987, 2001a, 2001b) propõe como um possível critério para caracterizar sintaticamente a noção de termo singular a máxima Aristotélica:

(a) Enquanto uma qualidade tem sempre um contrário, uma substância (primária) não tem.

Note que a máxima Aristotélica é afirmada em termos ontológicos. Contudo, Hale transforma-a em uma máxima sintática. Assim:

(a*) Enquanto um predicado tem sempre um contrário, um termo singular não tem.

[41] Hale também é um proponente do neofregeanismo e do neologicismo.

Entretanto, há um problema na formulação de Hale. Ela não dá conta de sentenças do tipo:

Todo mundo é sábio.

Ora, uma vez que "ser sábio" é um predicado, então deveria existir um outro predicado que é o contrário daquele, a saber, "ser não-sábio". Agora, se "a é sábio" for verdadeira", então "a é não-sábio" terá de ser falsa (e vice-versa). Contudo, "todo mundo é sábio" e "todo mundo é não-sábio" podem ser ambas falsas. Assim, "ser sábio" não teria, nesse caso, um contrário. O problema encontra-se, segundo Hale, na expressão "Todo mundo" que designa uma quantificação. O teste irá falhar também com as expressões: "algum", "alguém", "ninguém", "todos", "algum homem", etc. A ideia é, então, elaborar uma maneira de excluir todas estas expressões antes de aplicar a máxima Aristotélica. Para isso, Hale propõe assumir, em adição à máxima aristotélica, os critérios elaborados por Dummett (1973, cap. 4):

(b) Uma expressão t qualquer funcionará como termo singular em um certo contexto sentencial (no caso, o Português) se e somente se

  (i) for válida a inferência de '$A(t)$' para 'Algo é tal que ele é A'(ou existe algo que é A);

  (ii) for válida a inferência de '$A(t)$' e '$B(t)$' para 'Algo é tal que ele é A e é B';

  (iii) for válida a inferência de 'é verdadeiro de t que ele é A ou ele é B' para '$A(t)$ ou $B(t)$.

O critério (b)(i) exclui as palavras "ninguém", "nenhum", "nada", etc. (aqui pensando tais palavras no lugar da expressão t). Entretanto, tal critério não exclui as palavras "algum", "algum homem", "todos", etc. O critério (b)(ii) exclui as palavras "algum", "alguém", "um homem", etc. Contudo, tal critério não exclui palavras tais como "todo", "tudo", "todas as coisas", etc. Enfim, o critério (b)(iii) exclui estas últimas expressões.

Há dois problemas nesta caracterização sintática da noção de termo singular. O primeiro é que a noção depende de um determinado contexto (no caso acima, do Português). Assim, o Platonismo de Wright e Hale dependerá amplamente de uma linguagem natural. Teríamos uma espécie de Platonismo linguístico, ou seja, se em determinado contexto não existir este tipo de inferência, não teremos uma noção sintática de termo singular. Hale (1984) já previra isso, no entanto não há nenhuma tentativa séria, até onde sei, para superar este problema. O segundo problema é novamente: em que sentido os critérios acima são puramente sintáticos? Uma inferência como a de (b)(i) parece ser possível somente se o termo 't' denotar. O mesmo vale para (b)(ii) e (b)(iii). Portanto, estes critérios não seriam puramente sintáticos, ferindo a Tese da Prioridade Sintática.

3.3 O problema da restrição

O Problema da Restrição está conectado com os comprometimentos ontológicos do Princípio de Hume.

Wright sugere que a existência do número zero é uma consequência lógica do Princípio de Hume, uma vez que zero é definido como o número do conceito *ser diferente de si mesmo* ($[x : x \neq x]$) e é um teorema da lógica de segunda ordem que todo conceito é equinumérico a si mesmo e, em particular, que $[x : x \neq x]1 - 1[x : x \neq x]$. Portanto, temos:

1. $N_x : [x \neq x] = N_x : [x \neq x]. \equiv .[x : x \neq x]1 - 1[x : x \neq x]$, instância do Princípio de Hume;

2. $N_x : [x \neq x] = N_x : [x \neq x]$, lógica proposicional;

3. $\exists y(y = N_x : [x \neq x])$, lógica de predicados.

Contudo, Boolos levanta a seguinte objeção: uma vez que existe o número do conceito (lógico) *ser diferente de si mesmo*, também deveria existir o número do conceito (lógico) *ser idêntico a si mesmo* ($[x : x = x]$). Assim, teríamos:

1* $N_x : [x = x] = N_x : [x = x]. \equiv .[x : x = x]1 - 1[x : x = x]$, instância do Princípio de Hume;

2* $N_x : [x = x] = N_x : [x = x]$, lógica proposicional;

3* $\exists y(y = N_x : [x = x])$, lógica de predicados.

O Problema é que a existência de tal número (o número de todas as coisas que existem, ou antizero, segundo Boolos) é negada pela teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZFC) mais definições padrões. Na teoria de conjuntos ZFC, o número cardinal de um conjunto é definido como o menor ordinal cujos membros podem ser colocados em uma correspondência 1-1 com os membros do conjunto F. Interpretando isto em termos de conceitos, o número cardinal dos Fs (ou de um conceito F) é o menor número ordinal cujos membros são equinuméricos aos Fs.

Temos também em ZFC o axioma da substituição que diz que dada uma função $f : A \mapsto B$, se o domínio da função é um conjunto, então o contradomínio (range) da função também é um conjunto. Agora, a partir da definição acima de número cardinal dos Fs junto com axioma da substituição, segue-se que existe um conjunto dos Fs. Isto por uma razão muito simples: o número cardinal dos Fs é um ordinal cujos membros são equinuméricos aos Fs. Ora, os ordinais são uma espécie de conjuntos, portanto os Fs, posto que existe uma função dos membros de tal número ordinal nos Fs, são, segundo o axioma da substituição, elementos de um conjunto.

Agora, se F é o conceito *ser idêntico a si mesmo*, então teria de existir o conjunto de tal conceito, o conjunto de todas as coisas. Aqui, podemos deduzir alguns resultados incompatíveis com ZFC. Se assumirmos a existência do número cardinal do conceito *ser idêntico a si mesmo*, temos, segundo a definição de número cardinal em ZFC, que os objetos (os Fs) que caem sob tal conceito estão correlacionados 1-1 com os membros de um determinado número ordinal. Na verdade, os Fs estariam correlacionados 1-1 com o conjunto de todos os números ordinais, mas, em ZFC, a existência de tal conjunto é negada. Além disso, se assumirmos a existência do conjunto de todas as coisas, pelo axioma da separação[42], obtemos a existência do conjunto de todos os ordinais[43] (que é negada em ZFC, como já disse); a existência do conjunto de todos os cardinais[44], o que também é negada em ZFC; e, também, a existência do conjunto de todos os conjuntos, a partir do qual, novamente aplicando o axioma da separação, obtemos a existência do conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si mesmos, asserção que também é negada em ZFC[45].

Wright apresenta a seguinte resposta ao problema da restrição[46]: na concepção

[42] Grosso modo, o axioma da separação diz que se existe um conjunto A, então todos os seus subconjuntos existem.

[43] Os ordinais são objetos em ZFC, de maneira que se existe o conjunto de todas as coisas, então existirá o conjunto de todos os ordinais que é um subconjunto daquele conjunto. Dado o conjunto de todas as coisas e a propriedade *ser um número ordinal*, extraímos o conjunto de todos os ordinais.

[44] O mesmo raciocínio da nota anterior.

[45] Na verdade, a não-existência do conjunto de todos os conjuntos é um teorema de ZFC.

[46] Na verdade, Wright levanta a seguinte questão: "Who said numbers like antizero had to be sets, after all?" (WRIGHT, 2001b, p 314). Anteriormente, ele escreve: "A first rejoinder would be that any such upshot would depend on cross-identification of the referents of terms in Frege arithmetic and terms in Zermelo-Fraenkel set theory — the 'standard definitions' to which Boolos alludes." (WRIGHT, 2001b, 313-4).

de Frege nem todo conceito tem um número cardinal[47]. Somente conceitos sortais[48] têm uma resposta exata para a questão "quantos objetos que são F existem?"[49]. E segundo Wright, o conceito *ser idêntico a si mesmo* ($[x : x = x]$) não é sortal. Isto se deve ao seguinte fato: se um conceito sortal restringe o escopo de um conceito não sortal (Wright denomina também de "mero predicável"), então o conceito "amalgamado" dá uma resposta exata para a questão "quantos Fs e Gs existem?". Por exemplo, se restringirmos o escopo do conceito (não sortal) *vermelho* pelo conceito *livro*, então teremos uma resposta exata da questão "quantos livros vermelhos existem?" e, consequentemente, teremos um número cardinal de tal conceito. Ou seja, resulta da conjunção de um conceito sortal e de um conceito não sortal, segundo Wright, um conceito sortal. Portanto, se o conceito $[x : x = x]$ fosse sortal, teria de se esperar que a conjunção do mesmo com um conceito não sortal produzisse um conceito sortal. Mas, Wright observa que tal fato não ocorre. Na verdade, o escopo de um conceito não sortal continua o mesmo quando restrito ao conceito $[x : x = x]$[50]. Conclusão de Wright, o conceito $[x : x = x]$ não é sortal, logo não existe o número do conceito $[x : x = x]$.

Todavia, mesmo que aceitemos a solução engenhosa de Wright para mostrar que o número de todas as coisas não é derivável na Aritmética de Frege (não é uma consequência do Princípio de Hume), ela não é totalmente satisfatória e o próprio Wright reconhece isto. Ele escreve:

> To be sure, this first consideration will of course not engage the question whether we may properly conceive of a number of all ordinals, or all cardinals, or all sets — in general, cases where we are concerned with the results of applying the numerical operator to concepts which are (presumably) sortal but 'dangerously' big (WRIGHT, 2001b, p. 315).

A restrição de Wright sobre o escopo dos quantificadores de segunda ordem do

[47] Frege, em GLA §54, escreve: "Not all concepts possess this quality. We can, for example, divide up something falling under the concept 'red' into parts in a variety of ways, without the parts thereby ceasing to fall under the same concept 'red'. To a concept of this kind no finite number will belong. The proposition asserting that units are isolate and indivisible, accordingly, be formulated as follows: Only a concept which isolates what falls under it in a definite manner, and which does not permit any arbitrary division of it into parts, can be a unit relative to a finite Number".

[48] Grosso modo, um conceito sortal envolve um entendimento sobre quais objetos caem ou não sob tal conceito e, também, um entendimento sobre a distinção entre os objetos que caem sob tal conceito. Em outras palavras, um conceito sortal tem de ter um critério de aplicação e um critério de identidade.

[49] A ideia de Wright é restringir o escopo dos quantificadores de segunda ordem do Princípio de Hume a conceitos sortais. Assim, todo conceito que não é sortal não teria um número cardinal.

[50] Suponha o conceito *ser vermelho*. Suponha a restrição de seu escopo pelo conceito $[x : x = x]$. No fim, tudo que é vermelho é idêntico a si mesmo e o escopo não se altera.

Princípio de Hume exclui a possibilidade de o conceito *ser idêntico a si mesmo*, como afirmado acima, ter um número cardinal, porque o mesmo não é sortal. Entretanto, como Wright sustenta na última citação, conceitos como *número cardinal*, *número ordinal* e *conjunto* são sortais (ou presumivelmente são). Agora, a existência do número de tais conceitos é também incompatível com as asserções ontológicas de ZFC.

Seguindo o que foi afirmado anteriormente, é fácil ver que admitir, em ZFC, o número destes conceitos é admitir a existência do conjunto de todos os ordinais, o conjunto de todos os cardinais e o conjunto de todos os conjuntos, asserções existenciais negadas em ZFC. Duas possíveis respostas são aquelas duas primeiras já mencionadas na nota 45. Porém, Wright realmente leva em conta a objeção de Boolos. Mas, então, qual seria uma possível resposta? Wright propõe uma outra restrição sobre os quantificadores de segunda ordem do Princípio de Hume, a saber, que conceitos indefinidamente extensíveis não têm um número cardinal definido e, portanto, têm de ser excluídos de tal escopo. Agora, o que é um conceito indefinidamente extensível? A noção de *conceito indefinidamente extensível*, até onde sei, foi bastante trabalhada (e cunhada) por Dummett (1978, 1991 e 1993). Ele, por exemplo, escreve:

> An indefinitely extensible concept is one such that, if we can form a definite conception of a totality all of whose members fall under that concept, we can, by reference to that totality, characterize a larger totality all of whose members fall under it. (DUMMETT, 1993, p. 441).

Podemos exemplificar a ideia de Dummett da seguinte forma: seja o conjunto A o conjunto de todos os conjuntos. Ora, dado o axioma do conjunto potência[51], $\wp A$ (conjunto de todos os subconjuntos de A) é também um conjunto e, segundo o teorema de Cantor, a cardinalidade de $\wp A$ é maior que a de A. Mas, se $\wp A$ é um conjunto, então ele está incluído no conjunto de todos os conjuntos A. Contudo, $\wp A$ é uma totalidade maior que A, portanto A é indefinidamente extensível. Os conceitos *número cardinal*, *número ordinal*, *conjunto* serão todos, segundo Wright, indefinidamente extensíveis e, assim, devem ser excluídos do escopo dos quantificadores de segunda ordem do Princípio de Hume[52].

[51] Grosso modo, este axioma diz que se A é um conjunto, então o conjunto de subconjuntos de A é também um conjunto.

[52] A ideia que está por trás desta restrição de Wright parece ser a seguinte: uma vez que a noção de número cardinal é dada quando respondemos com exatidão à questão quantos Fs existem?, então o conceito F tem de ser exemplificado por um número determinado de indivíduos, o que não acontece com os conceitos *número cardinal*, *número ordinal* e *conjunto*.

Infelizmente, não poderemos avaliar neste artigo se esta restrição de Wright está em ordem. Mas vale ressaltar a seguinte questão: como podemos saber quais são os conceitos sortais indefinidamente extensíveis? A solução para esta questão parece ser totalmente *ad hoc* e dependente de um conhecimento prévio de teoria de conjuntos.

4 Conclusão

O grande mérito de *Frege´s Conception of Numbers as Objects* foi ressuscitar o debate sobre o projeto logicista Fregeano da aritmética dos números naturais nos últimos trinta anos. Por exemplo, Dummett (1973), na sua introdução, afirmara que a filosofia da matemática de Frege era inócua e arcaica e que sua importância era apenas histórica. Por outro lado, o mesmo Dummett (1991), no prefácio, não tem a mesma opinião que aquela dada em 1973. Em grande parte, isso se deve aos resultados apresentados por Wright (1983). Boolos, nos seus primeiros trabalhos sobre o tema, considerava o Teorema de Frege um resultado realmente interessante.

Apesar do interessante resultado técnico, a defesa do Princípio de Hume como uma definição implícita que introduz analiticamente o operador numérico "o número de" é problemática. A objeção da Má Companhia põe em xeque a argumentação de Wright. Ademais, a solução de Wright em relação ao problema da restrição parece ser completamente *ad hoc*. Como é possível saber *a priori* se um determinado conceito sortal é indefinidamente extensível ou não?

Além disso, o projeto neofregeano, do qual um dos objetivos é provar a existência de números naturais, parece depender do princípio do contexto. Agora, para reivindicar logicismo, Wright teria de argumentar que tal princípio tem natureza lógica. Isso não é feito, até onde sei, em nenhum dos seus escritos. Ademais, o neofregeanismo tem dificuldades em definir sintaticamente a noção de termo singular. As sugestões parecem depender de critérios nas linguagens naturais (produzindo um platonismo local) e de noções semânticas, infringindo a tese da prioridade sintática.

Na minha opinião, as respostas neofregeanas às objeções discutidas neste artigo não são totalmente satisfatórias.

Referências Bibliográficas

BENACERRAF, P. Mathematical truth. *Journal of Philosophy*, v. 70, n. 19, p. 661-679, 1973.

BOOLOS, G. The standard of equality of numbers. In: ______. *Logic, logic and logic*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1998a. p. 202-219.

______. Saving Frege from contradiction. In: ______. *Logic, logic and logic*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1998b. p. 171-82.

______. The consistency of Frege's Foundations of Arithmetic. In: ______. *Logic, logic and logic*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1998c. p. 183-201.

______. Is Hume´s Principle analytic?. In: ______. *Logic, logic and logic*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1998d. p. 301-314.

BOSTOCK, D. *Logic and arithmetic:* natural numbers. Oxford: Clarendon Press, 1974.

BURGESS, J. Review of Wright (1983). *Philosophical review*, v. 93, p. 638-40, 1984.

CHATEAUBRIAND, O. *Logical forms part I:* truth and description. *Coleção CLE*, v. 34, 2001.

DUARTE, A. B. *Princípio de Hume:* possibilidade de uma filosofia (neo) Fregeana da aritmética? 2004. Dissertação (Mestrado em Filosofia) — PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2004.

______. *Lógica e aritmética na filosofia de Gottlob Frege.* 2009. Tese (Doutorado em Filosofia) — PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2009.

DUMMETT, M. The philosophical significance of Gödel´s theorem. In: ______. *Truth and other enigmas*. London: Duckworth, 1978. p. 186-201.

______. *Frege:* philosophy of language. London: Duckworth, 1973.

______. *Frege:* philosophy of mathematics. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1991.

______. *The seas of language*. Oxford: Clarendon Press, 1993.

FIELD, H. *Science without numbers*. Oxford: Basil Blackwell, 1980.

FREGE, G. *The foundations of arithmetic.* A logico-mathematical enquiry into the concept of number. Ed. rev., tradução J. L. Austin. Oxford: Basil Blackwell, 1986.

______. *The basic laws of arithmetic.* Derived using concept-script. Edição e tradução P. A. Ebert e M. Rossberg. Oxford: Oxford University Press, 2013.

HALE, B. Frege's Platonism. In WRIGHT, C. (Ed.). *Frege:* tradition & influence. Oxford: Basil Blackwell, p. 40-56, 1984.

______. *Abstract objects*. Oxford: Basil Blackwell, 1987.

______. Singular term I. In: HALE, B.; WRIGHT, C. *The reason´s proper study:* essays towards a neo-Fregean philosophy of mathematics. New York: Oxford University Press, 2001a. p. 31-47.

______. Singular term (2). In: HALE, B.; WRIGHT, C. *The reason´s proper study:* essays towards a neo-Fregean philosophy of mathematics. New York: Oxford University Press, 2001b. p. 48-71.

HECK, R. On the consistency of second-order contextual definitions. *Noûs*, v. 64, p. 491-4, 1992.

______. The consistency of predicative fragments of Frege's Grundgesetze der Arithmetik. *History and Philosophy of Logic*, v. 17, p. 209-20, 1996.

LANDINI. G. *Frege's notations:* what they are and how they mean. New York: Palgrave Macmillan, 2012.

MACBRIDE, F. Speaking with shadows: a study of neo-logicism. *British Journal of Philosophy of Science*, v. 54, p. 103-163, 2003.

RUFFINO, M. Logicism: Fregean and Neo-Fregean. *Manuscrito: Revista Internacional de Filosofia*, v. 21, n. 1, p. 149-188, 1998.

SHAPIRO, S; WEIR, A. New V, ZF and abstraction. *Philosophia Mathematica*, v. 7, n. 3, p. 293-321, 1999.

WRIGHT, C. *Frege's conception of numbers as objects*. Aberdeen: Aberdeen University Press, 1983.

______. On the philosophical significance of Frege's theorem. In: HALE, B.; WRIGHT, C. *The reason´s proper study:* essays towards a neo-Fregean philosophy of mathematics. New York: Oxford University Press, 2001a. p. 273-306.

______. Is Hume's Principle analytic?. In: HALE, B.; WRIGHT, C. *The reason´s proper study:* essays towards a neo-Fregean philosophy of mathematics. New York: Oxford University Press, 2001b. p. 307-332.